

Μετρικοί Χώροι και η Τοπολογία τους, 12/6/2025, Α. Τόλιας

Θέμα 1. (2,5 μον.)

α) Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος. Τι ονομάζεται συνεκτική συνιστώσα του X ; (να αναφέρετε τον ορισμό). Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι οι συνεκτικές συνιστώσες του X αποτελούν διαμέριση του συνόλου X (δηλαδή ότι είναι μη κενά, ξένα ανά δύο υποσύνολα του X των οποίων η ένωση είναι ίση με X).

β) Θεωρούμε τον $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$, όπου ρ_2 είναι ευκλείδεια μετρική. Να δώσετε παράδειγμα ενός υποσυνόλου E του $\mathbb{R}^2$ ώστε το E να έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες, το $\overline{E}$ να έχει μια συνεκτική συνιστώσα (να είναι δηλαδή συνεκτικό), και το E° να έχει τρεις συνεκτικές συνιστώσες.

Θέμα 2. (2 μον.)

α) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε τις βασικές ιδιότητες των ανοικτών συνόλων ενός μετρικού χώρου.

β) Αν (X, ρ) είναι ένας μετρικός χώρος και A είναι ένα υποσύνολο του X , να δείξετε ότι το παράγωγο σύνολο A' του A (δηλ. το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του A) είναι κλειστό υποσύνολο του X .

Θέμα 3. (2,5 μον.)

α) Έστω (X, ρ) και (Y, d) δυο μετρικοί χώροι και $f : X \rightarrow Y$ μια συνεχής συνάρτηση. Να δείξετε ότι αν K είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του X τότε το $f(K)$ είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του Y .

β) Έστω (X, ρ) ένας συμπαγής μετρικός χώρος, $f : X \rightarrow X$ μια συνεχής συνάρτηση και $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία στο X ώστε να ισχύει $\rho(f(x_n), x_n) \rightarrow 0$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει σταθερό σημείο.

Θέμα 4. (1,5 μον.)

Θεωρούμε τον μετρικό χώρο $(\mathbb{Q}, \rho)$, όπου $\mathbb{Q}$ είναι το σύνολο των ρητών αριθμών και με ρ συμβολίζουμε τη σχετική μετρική από τη συνήθη μετρική του $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει μετρική d στο $\mathbb{Q}$ ισοδύναμη της ρ για την οποία ο $(\mathbb{Q}, d)$ να είναι πλήρης. (Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε το Θεώρημα Baire).

Θέμα 5. (1,5 μον.)

Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος και K, F δυο μη κενά υποσύνολα του X με το K να είναι συμπαγές, το F να είναι κλειστό και να ισχύει $K \cap F = \emptyset$. Να δείξετε $\rho(K, F) > 0$.

Θέμα 6. (1 μον.)

Αν (X, ρ) είναι ένας μετρικός χώρος και $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία από μη κενά συμπαγή υποσύνολα του X να δείξετε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.

Καλή Επιτυχία!